SAMPLE PROBLEMS 3
(IMONST 1)

Malaysia IMO Committee
contact@imo-malaysia.org

Contents

1 About IMONST

IMO National Selection Test (IMONST) is a national-level mathematics competition whose objective is to promote mathematical problem solving among Malaysian students, and challenge the top mathematical talents in the country. It is organized by the Malaysia IMO Committee. IMONST is approved by the MoE as the selection process for the Malaysian team for the International Mathematical Olympiad (IMO) 2021.

The IMO is the World Championship Mathematics Competition for High School students and is held annually in a different country. The first IMO was held in 1959 in Romania, with 7 countries participating. It has gradually expanded to over 100 countries from 5 continents.

There are two rounds of IMONST: IMONST 1 is an open round, while IMONST 2 is by invitation only.

This booklet covers some sample problems that are comparable to the difficulty of the IMONST 1 paper.

For more details about IMONST, go to `https://imo-malaysia.org/imonst/` .

Categories

There are four categories in IMONST 1:

1. Primary – advanced primary school students
2. Junior – Form 1 to Form 3 students
3. Senior – Form 4 to Form 6, and pre-university students
4. Open – for everyone else.

The Primary participants write the same paper as the Junior participants, and the Open participants write the same paper as the Senior participants.

This is the first time that primary school students are involved in IMO selection in Malaysia. Although the IMONST is perhaps too difficult for the average primary student, bear in mind that there are exceptional mathematical talents of a very young age (as an example, one of the Malaysian participants in IMO 2014 was 12 years old). The IMONST aims to identify the young talents so they can be groomed to be part of future IMO teams.

The inclusion of an Open category is also something new. The idea is to engage those outside schools (adults, university students, teachers) in a fun competition to celebrate mathematical problem solving and creative thinking. The participants in the Open category are not ranked, and they are not eligible for further selection rounds.

Format of IMONST 1

IMONST is an online, individual, open-book competition. Students are allowed to use any reference and calculating tools, as long as they sit for the competition themselves without any external help. The problems are designed such that it can be solved without using a calculator.

There are 20 questions for each category, divided into 4 parts (A to D). The parts are arranged in increasing order of difficulty. Every correct answer is awarded 1, 2, 3, 4 points for Part A, B, C, D, respectively. No point is deducted for an incorrect answer. The maximum score is 50 points.

For every question, only the answer needs to be provided. The answer to each question is a non-negative integer.

Problems in IMONST 1 are provided in both Bahasa Melayu and English.

Contact Us

Email the IMO Malaysia Committee at `contact@imo-malaysia.org` .

Version

Version 1.1 (author: M. Suhaimi Ramly), updated on 19 July 2020.

Part I

Bahasa Melayu

2 Kategori *Primary*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Cari nilai bagi

$$\frac{2020}{\dfrac{29-13}{29+13}+\dfrac{29+13}{29-13}}.$$

Soalan 2. Tiga integer positif berbeza a, b, dan c memenuhi persamaan

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Apakah nilai bagi $a+b+c$?

Soalan 3. Suatu kuboid bersaiz 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ L cm mempunyai jumlah luas permukaan yang sama dengan suatu kiub dengan panjang sisi 5 cm.

Cari nilai L.

Soalan 4. Suatu buku 80 mukasurat terdiri daripada 20 keping kertas yang dilipat separuh dan dicantumkan menggunakan 'stapler' pada lipatan tersebut. Mukasurat 1, 2, 79, 80 tercetak pada kertas yang sama. Mukasurat 39, 40, 41, 42 tercetak pada kertas yang sama. Kertas yang mengandungi mukasurat 10 mempunyai tiga mukasurat lain yang tercetak di atasnya.

Apakah hasil tambah tiga nombor mukasurat tersebut?

Soalan 5. Diberi suatu nombor tiga digit A. Hasil tambah digit-digit bagi A ialah B. Hasil tambah digit-digit bagi B ialah C.

Apakah nilai terbesar yang mungkin bagi C?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 6. Empat nombor perdana berturutan $p < q < r < s$ memenuhi persamaan

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 2020.$$

Apakah nilai s?

Soalan 7. Suatu integer N memenuhi hanya tiga daripada lima syarat berikut:

$$2N > 70, \qquad N < 100, \qquad 3N > 25, \qquad \frac{N}{5} \geq 2, \qquad 5N - 3 > 22.$$

Apakah nilai N?

Soalan 8. Hanis melukis satu bulatan dan dua segiempat sama di atas sekeping kertas. Bentuk-bentuk tersebut bersilang pada beberapa titik.

Berapakah bilangan titik persilangan terbanyak yang mungkin di kalangan tiga bentuk tersebut?

Nota: Titik persilangan merupakan titik yang terletak pada sekurang-kurangnya dua bentuk tersebut. Andaikan bahawa bilangan titik persilangan adalah terhingga.

Soalan 9. Simbol a, b, c, d, e, f, g, h diberikan nilai integer yang berbeza daripada 1 hingga 8, supaya nombor

$$\frac{a + 2b + 3c + 4d}{e + 2f + 3g + 4h}$$

adalah sebesar yang mungkin.

Tentukan nilai bagi $b + f$.

Soalan 10. Pada suatu hari, Alina membawa 5 keping biskut dan Betty membawa 7 keping biskut ke sekolah. Kawan baik mereka Cheeta terlupa untuk membawa makanan, maka Alina dan Betty berkongsi biskut tersebut secara sama rata di kalangan mereka bertiga. Pada hari seterusnya, Cheeta membawa 12 kek cawan, kesemuanya untuk diberikan kepada Alina dan Betty untuk membalas jasa baik mereka pada hari sebelumnya.

Berapakah bilangan kek cawan yang Alina patut terima jika dia membuat pembahagian yang saksama dengan Betty?

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Cari integer positif N yang memenuhi persamaan

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Soalan 12. Antara nombor-nombor dalam jujukan berikut:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

berapakah bilangan nombor yang merupakan integer?

Soalan 13. Bendera Malaysia terdiri daripada satu segiempat tepat berwarna biru yang terletak di penjuru atas kiri, dan 14 jalur dengan ketebalan yang sama, yang berwarna merah dan putih secara berselang seli. Lebar bagi segiempat tepat biru tersebut adalah separuh daripada lebar bagi bendera tersebut.

Jika suatu bendera Malaysia mempunyai luas 140 cm^2, tentukan luas kawasan bendera tersebut (dalam unit cm^2) yang berwarna merah.

Soalan 14. Di sebuah kebun bunga, 99% daripada semua bunga-bunganya adalah bunga ros, dan selebihnya adalah bunga lili. Tukang kebun tersebut ingin mengurangkan peratusan bunga ros kepada 98% dengan membuang beberapa bunga ros. Jumlah bunga ros yang perlu dibuang adalah $k\%$ daripada semua bunga-bunga tersebut.

Cari nilai k.

Soalan 15. Farah menerima sekeping kalendar bagi tahun 2020 sebagai saguhati. Apabila tahun ini berakhir, dia bercadang untuk menyimpannya kerana dia boleh menggunakan kalendar yang sama pada suatu tahun N pada masa akan datang (ini bermakna bagi mana-mana haribulan pada tahun N, ia akan jatuh pada hari yang sama pada tahun 2020. Sebagai contoh, 5 September pada tahun N akan jatuh pada hari Sabtu, sama seperti 5 September 2020).

Apakah nilai terkecil yang mungkin bagi N?

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Suatu integer positif ditakrifkan sebagai *hebat* jika hasil tambah digit-digitnya adalah sama dengan bilangan digitnya. Sebagai contoh, nombor 2020 adalah hebat kerana hasil tambah digit-digitnya bersamaan bilangan digitnya iaitu 4.

Berapakah bilangan integer positif hebat (termasuk 2020) yang kurang daripada 10,000?

Nota: Suatu integer hebat tidak boleh bermula dengan digit 0.

Soalan 17. Cari digit terakhir bagi nombor

$$\left(\left(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\right)^{30}+1\right)^{40}.$$

Soalan 18. Andaikan $ABCDEF$ suatu heksagon sekata. Garis AC dan BE bersilang pada G.

Tentukan nilai bagi $\dfrac{\text{luas } \triangle AGE}{\text{luas } \triangle BCG}$.

Soalan 19. Tentukan gandaan terbesar bagi 125 dengan semua digit-digitnya berbeza.

Soalan 20. Diberi suatu jujukan integer

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Bermula daripada sebutan ketiga, setiap sebutan adalah bersamaan hasil tambah bagi semua sebutan yang terdahulu (sebagai contoh, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). Diketahui bahawa $a_1 = 1$, dan n merupakan integer terbesar yang mungkin dengan $a_n = 10000$.

Cari nilai a_2.

3 Kategori *Junior*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Empat nombor perdana berturutan $p < q < r < s$ memenuhi persamaan

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 2020.$$

Apakah nilai s?

Soalan 2. Suatu integer N memenuhi hanya tiga daripada lima syarat berikut:

$$2N > 70, \qquad N < 100, \qquad 3N > 25, \qquad \frac{N}{5} \geq 2, \qquad 5N - 3 > 22.$$

Apakah nilai N?

Soalan 3. Hanis melukis satu bulatan dan dua segiempat sama di atas sekeping kertas. Bentuk-bentuk tersebut bersilang pada beberapa titik.

Berapakah bilangan titik persilangan terbanyak yang mungkin di kalangan tiga bentuk tersebut?

Nota: Titik persilangan merupakan titik yang terletak pada sekurang-kurangnya dua bentuk tersebut. Andaikan bahawa bilangan titik persilangan adalah terhingga.

Soalan 4. Simbol a, b, c, d, e, f, g, h diberikan nilai integer yang berbeza daripada 1 hingga 8, supaya nombor

$$\frac{a + 2b + 3c + 4d}{e + 2f + 3g + 4h}$$

adalah sebesar yang mungkin.

Tentukan nilai bagi $b + f$.

Soalan 5. Pada suatu hari, Alina membawa 5 keping biskut dan Betty membawa 7 keping biskut ke sekolah. Kawan baik mereka Cheeta terlupa untuk membawa makanan, maka Alina dan Betty berkongsi biskut tersebut secara sama rata di kalangan mereka bertiga. Pada hari seterusnya, Cheeta membawa 12 kek cawan, kesemuanya untuk diberikan kepada Alina dan Betty untuk membalas jasa baik mereka pada hari sebelumnya.

Berapakah bilangan kek cawan yang Alina patut terima jika dia membuat pembahagian yang saksama dengan Betty?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 6. Cari integer positif N yang memenuhi persamaan

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Soalan 7. Antara nombor-nombor dalam jujukan berikut:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

berapakah bilangan nombor yang merupakan integer?

Soalan 8. Bendera Malaysia terdiri daripada satu segiempat tepat berwarna biru yang terletak di penjuru atas kiri, dan 14 jalur dengan ketebalan yang sama, yang berwarna merah dan putih secara berselang seli. Lebar bagi segiempat tepat biru tersebut adalah separuh daripada lebar bagi bendera tersebut.

Jika suatu bendera Malaysia mempunyai luas 140 cm^2, tentukan luas kawasan bendera tersebut (dalam unit cm^2) yang berwarna merah.

Soalan 9. Di sebuah kebun bunga, 99% daripada semua bunga-bunganya adalah bunga ros, dan selebihnya adalah bunga lili. Tukang kebun tersebut ingin mengurangkan peratusan bunga ros kepada 98% dengan membuang beberapa bunga ros. Jumlah bunga ros yang perlu dibuang adalah k% daripada semua bunga-bunga tersebut.

Cari nilai k.

Soalan 10. Farah menerima sekeping kalendar bagi tahun 2020 sebagai saguhati. Apabila tahun ini berakhir, dia bercadang untuk menyimpannya kerana dia boleh menggunakan kalendar yang sama pada suatu tahun N pada masa akan datang (ini bermakna bagi mana-mana haribulan pada tahun N, ia akan jatuh pada hari yang sama pada tahun 2020. Sebagai contoh, 5 September pada tahun N akan jatuh pada hari Sabtu, sama seperti 5 September 2020).

Apakah nilai terkecil yang mungkin bagi N?

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Suatu integer positif ditakrifkan sebagai *hebat* jika hasil tambah digit-digitnya adalah sama dengan bilangan digitnya. Sebagai contoh, nombor 2020 adalah hebat kerana hasil tambah digit-digitnya bersamaan bilangan digitnya iaitu 4.

Berapakah bilangan integer positif hebat (termasuk 2020) yang kurang daripada 10,000?

Nota: Suatu integer hebat tidak boleh bermula dengan digit 0.

Soalan 12. Cari digit terakhir bagi nombor

$$\left(\left(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\right)^{30}+1\right)^{40}.$$

Soalan 13. Andaikan $ABCDEF$ suatu heksagon sekata. Garis AC dan BE bersilang pada G.

Tentukan nilai bagi $\dfrac{\text{luas } \triangle AGE}{\text{luas } \triangle BCG}$.

Soalan 14. Tentukan gandaan terbesar bagi 125 dengan semua digit-digitnya berbeza.

Soalan 15. Diberi suatu jujukan integer

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Bermula daripada sebutan ketiga, setiap sebutan adalah bersamaan hasil tambah bagi semua sebutan yang terdahulu (sebagai contoh, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). Diketahui bahawa $a_1 = 1$, dan n merupakan integer terbesar yang mungkin dengan $a_n = 10000$.

Cari nilai a_2.

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Berapakah bilangan integer palindromik yang masih merupakan integer palindromik selepas ditambahkan 2020?

Nota: Suatu integer adalah palindromik jika nombornya tetap sama jika dibaca dari hadapan atau belakang. Sebagai contoh, 747 dan 1991 adalah integer palindromik.

Soalan 17. Cari integer positif $n \geq 100$ yang terkecil supaya

$$\sqrt{2^n + 2^{100} + 2^{103}}$$

adalah suatu integer.

Soalan 18. Diberi suatu trapezium $ABCD$, dengan sisi AB selari dengan sisi CD. Dua pepenjuru trapezium tersebut bersilang pada E. Diketahui bahawa luas $\triangle DAE$ adalah 3 kali lebih besar daripada luas $\triangle ABE$.

Tentukan nilai bagi $\dfrac{\text{luas } \triangle BCD}{\text{luas } \triangle ABE}$.

Soalan 19. Dalam suatu kelas dengan 100 orang pelajar, terdapat a pelajar perempuan dan b pelajar lelaki, dengan $0 \leq a \leq 100$. Hasil tambah digit-digit bagi a ialah $S(a)$, dan hasil tambah digit-digit bagi b ialah $S(b)$.

Jika $S(a) + S(b) = 19$, berapakah bilangan nilai yang mungkin bagi a?

Soalan 20. Suatu nombor dikatakan bersifat k-bagus jika nombor tersebut boleh diungkapkan sebagai hasil tambah k integer positif yang berturutan. Sebagai contoh, 27 adalah bersifat 2-bagus dan 3-bagus, kerana 27 boleh diungkapkan sebagai

$$27 = 13 + 14 \qquad \text{dan} \qquad 27 = 8 + 9 + 10.$$

Cari nombor terkecil yang bersifat 2-bagus, 3-bagus, dan 7-bagus.

4 Kategori *Senior*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Cari integer positif N yang memenuhi persamaan

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Soalan 2. Antara nombor-nombor dalam jujukan berikut:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

berapakah bilangan nombor yang merupakan integer?

Soalan 3. Bendera Malaysia terdiri daripada satu segiempat tepat berwarna biru yang terletak di penjuru atas kiri, dan 14 jalur dengan ketebalan yang sama, yang berwarna merah dan putih secara berselang seli. Lebar bagi segiempat tepat biru tersebut adalah separuh daripada lebar bagi bendera tersebut.

Jika suatu bendera Malaysia mempunyai luas 140 cm^2, tentukan luas kawasan bendera tersebut (dalam unit cm^2) yang berwarna merah.

Soalan 4. Di sebuah kebun bunga, 99% daripada semua bunga-bunganya adalah bunga ros, dan selebihnya adalah bunga lili. Tukang kebun tersebut ingin mengurangkan peratusan bunga ros kepada 98% dengan membuang beberapa bunga ros. Jumlah bunga ros yang perlu dibuang adalah k% daripada semua bunga-bunga tersebut.

Cari nilai k.

Soalan 5. Farah menerima sekeping kalendar bagi tahun 2020 sebagai saguhati. Apabila tahun ini berakhir, dia bercadang untuk menyimpannya kerana dia boleh menggunakan kalendar yang sama pada suatu tahun N pada masa akan datang (ini bermakna bagi mana-mana haribulan pada tahun N, ia akan jatuh pada hari yang sama pada tahun 2020. Sebagai contoh, 5 September pada tahun N akan jatuh pada hari Sabtu, sama seperti 5 September 2020).

Apakah nilai terkecil yang mungkin bagi N?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 6. Suatu integer positif ditakrifkan sebagai *hebat* jika hasil tambah digit-digitnya adalah sama dengan bilangan digitnya. Sebagai contoh, nombor 2020 adalah hebat kerana hasil tambah digit-digitnya bersamaan bilangan digitnya iaitu 4.

Berapakah bilangan integer positif hebat (termasuk 2020) yang kurang daripada 10,000?

Nota: Suatu integer hebat tidak boleh bermula dengan digit 0.

Soalan 7. Cari digit terakhir bagi nombor

$$\Big(\big(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\big)^{30}+1\Big)^{40}.$$

Soalan 8. Andaikan $ABCDEF$ suatu heksagon sekata. Garis AC dan BE bersilang pada G.

Tentukan nilai bagi $\dfrac{\text{luas } \triangle AGE}{\text{luas } \triangle BCG}$.

Soalan 9. Tentukan gandaan terbesar bagi 125 dengan semua digit-digitnya berbeza.

Soalan 10. Diberi suatu jujukan integer

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Bermula daripada sebutan ketiga, setiap sebutan adalah bersamaan hasil tambah bagi semua sebutan yang terdahulu (sebagai contoh, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). Diketahui bahawa $a_1 = 1$, dan n merupakan integer terbesar yang mungkin dengan $a_n = 10000$.

Cari nilai a_2.

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Berapakah bilangan integer palindromik yang masih merupakan integer palindromik selepas ditambahkan 2020?

Nota: Suatu integer adalah palindromik jika nombornya tetap sama jika dibaca dari hadapan atau belakang. Sebagai contoh, 747 dan 1991 adalah integer palindromik.

Soalan 12. Cari integer positif $n \geq 100$ yang terkecil supaya

$$\sqrt{2^n + 2^{100} + 2^{103}}$$

adalah suatu integer.

Soalan 13. Diberi suatu trapezium $ABCD$, dengan sisi AB selari dengan sisi CD. Dua pepenjuru trapezium tersebut bersilang pada E. Diketahui bahawa luas $\triangle DAE$ adalah 3 kali lebih besar daripada luas $\triangle ABE$.

Tentukan nilai bagi $\dfrac{\text{luas } \triangle BCD}{\text{luas } \triangle ABE}$.

Soalan 14. Dalam suatu kelas dengan 100 orang pelajar, terdapat a pelajar perempuan dan b pelajar lelaki, dengan $0 \leq a \leq 100$. Hasil tambah digit-digit bagi a ialah $S(a)$, dan hasil tambah digit-digit bagi b ialah $S(b)$.

Jika $S(a) + S(b) = 19$, berapakah bilangan nilai yang mungkin bagi a?

Soalan 15. Suatu nombor dikatakan bersifat k-bagus jika nombor tersebut boleh diungkapkan sebagai hasil tambah k integer positif yang berturutan. Sebagai contoh, 27 adalah bersifat 2-bagus dan 3-bagus, kerana 27 boleh diungkapkan sebagai

$$27 = 13 + 14 \qquad \text{dan} \qquad 27 = 8 + 9 + 10.$$

Cari nombor terkecil yang bersifat 2-bagus, 3-bagus, dan 7-bagus.

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Diberi integer a, b, c, d dengan $a > b > c > d > 1$, dan

$$(ac)^2 - (bd)^2 + (ad)^2 - (bc)^2 = 2020.$$

Cari nilai $a + b + c + d$.

Soalan 17. Diketahui bahawa bilangan pelajar perempuan di dalam sebuah kelas adalah lebih daripada 48% tetapi kurang daripada 50% daripada jumlah semua pelajar.

Berapakah bilangan pelajar terkecil yang mungkin dalam kelas tersebut?

Soalan 18. Berapakah bilangan sudut refleks terbanyak yang mungkin di dalam suatu poligon dengan 100 sisi?

Soalan 19. Andaikan x dan y nombor nyata dengan

$$|x - y| + |x + y| = 2.$$

Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi $x^2 + y^2 - 9y$.

Soalan 20. Pertimbangkan satah koordinat dalam dua dimensi. Bagi setiap integer positif n, takrifkan $f(n)$ sebagai bilangan titik kekisi yang terletak pada tembereng garis yang menyambungkan titik $(0, 0)$ ke titik $(n, n+6)$, tanpa mengira kedua-dua titik hujung tersebut.

Cari nilai bagi

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1000).$$

Nota: Titik kekisi ialah titik dengan kedua-dua koordinat-x dan koordinat-y integer.

Part II

English

5 Primary Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Find the value of

$$\frac{2020}{\dfrac{29-13}{29+13}+\dfrac{29+13}{29-13}}.$$

Problem 2. Three different positive integers a, b, and c satisfy the equation

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

What is the value of $a+b+c$?

Problem 3. A cuboid of size 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ L cm has the same total surface area as a cube with side length 5 cm.

Problem 4. An 80-page book is made up of 20 sheets of paper which have been folded in half and stapled at the fold. Pages 1, 2, 79, 80 are printed on the same sheet. Pages 39, 40, 41, 42 are printed on the same sheet. The sheet that contains page 10 has three other pages printed on it.

What is the sum of these three page numbers?

Problem 5. Given a three-digit number A. The sum of the digits of A is B. The sum of the digits of B is C.

What is the largest possible value of C?

Part B (2 points each)

Problem 6. Four consecutive prime numbers $p < q < r < s$ satisfy the equation

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 2020.$$

What is s?

Problem 7. An integer N fulfills exactly three of the following five conditions:

$$2N > 70, \qquad N < 100, \qquad 3N > 25, \qquad \frac{N}{5} \geq 2, \qquad 5N - 3 > 22.$$

What is N?

Problem 8. Hanis draws a circle and two squares on a paper. The figures intersect at several points.

What is the maximum possible number of intersection points among these three figures?

Note: An intersection point is a point that lies on at least two of the figures. Assume that the number of intersection points is finite.

Problem 9. The symbols a, b, c, d, e, f, g, h are assigned different integer values from 1 to 8, such that the number

$$\frac{a + 2b + 3c + 4d}{e + 2f + 3g + 4h}$$

is as large as possible.

Determine the value of $b + f$.

Problem 10. One day, Alina brought 5 biscuits and Betty brought 7 biscuits to school. Their good friend Cheeta forgot to bring any food, so Alina and Betty shared the biscuits equally among the three of them. On the next day, Cheeta bought 12 cupcakes, all to be given to Alina and Betty to repay their kindness on the previous day.

How many cupcakes should Alina receive if she makes a fair distribution with Betty?

Part C (3 points each)

Problem 11. Find the positive integer N that satisfies the equation

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Problem 12. Among the numbers in the following sequence:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

how many of them are integers?

Problem 13. The flag of Malaysia consists of a blue rectangle at the upper left corner, and 14 stripes with equal thickness, coloured alternately red and white. The width of the blue rectangle is half the width of the flag.

If a Malaysian flag has an area of 140 cm^2, determine the area of the flag (in cm^2) that is coloured red.

Problem 14. In a flower garden, 99% of the flowers are roses, and the rest are lilies. The gardener wants to decrease the percentage of roses to 98% by discarding some roses. The amount of roses he needs to discard is k% of all the flowers.

Find k.

Problem 15. Farah received a calendar for year 2020 as a gift. Once the year ends, she plans to keep it because she can reuse the exact same calendar in a future year N (this means that for any given date in year N, it will fall on the same day as in year 2020. For example, 5 September in year N will fall on Saturday, as is 5 September 2020).

What is the smallest possible N?

Part D (4 points each)

Problem 16. A positive integer is defined as *awesome* if the sum of its digits equals its number of digits. For example, the number 2020 is awesome because its sum of digits and its number of digits are both 4.

How many awesome positive integers (including 2020) less than 10,000 are there?

Note: An awesome integer cannot start with digit 0.

Problem 17. Find the last digit of the number

$$\left(\left(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\right)^{30}+1\right)^{40}.$$

Problem 18. Let $ABCDEF$ be a regular hexagon. Lines AC and BE intersect at G. Determine the value of $\dfrac{\text{area of } \triangle AGE}{\text{area of } \triangle BCG}$.

Problem 19. Determine the largest multiple of 125 with all its digits different.

Problem 20. Given a sequence of integers

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Starting from the third term, each term is equal to the sum of all previous terms (for example, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). It is known that $a_1 = 1$, and n is the largest possible integer with $a_n = 10000$.

Find a_2.

6 Junior Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Four consecutive prime numbers $p < q < r < s$ satisfy the equation

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 2020.$$

What is s?

Problem 2. An integer N fulfills exactly three of the following five conditions:

$$2N > 70, \qquad N < 100, \qquad 3N > 25, \qquad \frac{N}{5} \geq 2, \qquad 5N - 3 > 22.$$

What is N?

Problem 3. Hanis draws a circle and two squares on a paper. The figures intersect at several points.

What is the maximum possible number of intersection points among these three figures?

Note: An intersection point is a point that lies on at least two of the figures. Assume that the number of intersection points is finite.

Problem 4. The symbols a, b, c, d, e, f, g, h are assigned different integer values from 1 to 8, such that the number

$$\frac{a + 2b + 3c + 4d}{e + 2f + 3g + 4h}$$

is as large as possible.

Determine the value of $b + f$.

Problem 5. One day, Alina brought 5 biscuits and Betty brought 7 biscuits to school. Their good friend Cheeta forgot to bring any food, so Alina and Betty shared the biscuits equally among the three of them. On the next day, Cheeta bought 12 cupcakes, all to be given to Alina and Betty to repay their kindness on the previous day.

How many cupcakes should Alina receive if she makes a fair distribution with Betty?

Part B (2 points each)

Problem 6. Find the positive integer N that satisfies the equation

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Problem 7. Among the numbers in the following sequence:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

how many of them are integers?

Problem 8. The flag of Malaysia consists of a blue rectangle at the upper left corner, and 14 stripes with equal thickness, coloured alternately red and white. The width of the blue rectangle is half the width of the flag.

If a Malaysian flag has an area of 140 cm^2, determine the area of the flag (in cm^2) that is coloured red.

Problem 9. In a flower garden, 99% of the flowers are roses, and the rest are lilies. The gardener wants to decrease the percentage of roses to 98% by discarding some roses. The amount of roses he needs to discard is $k\%$ of all the flowers.

Find k.

Problem 10. Farah received a calendar for year 2020 as a gift. Once the year ends, she plans to keep it because she can reuse the exact same calendar in a future year N (this means that for any given date in year N, it will fall on the same day as in year 2020. For example, 5 September in year N will fall on Saturday, as is 5 September 2020).

What is the smallest possible N?

Part C (3 points each)

Problem 11. A positive integer is defined as *awesome* if the sum of its digits equals its number of digits. For example, the number 2020 is awesome because its sum of digits and its number of digits are both 4.

How many awesome positive integers (including 2020) less than 10,000 are there?

Note: An awesome integer cannot start with digit 0.

Problem 12. Find the last digit of the number

$$\Big(\big(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\big)^{30}+1\Big)^{40}.$$

Problem 13. Let $ABCDEF$ be a regular hexagon. Lines AC and BE intersect at G.

Determine the value of $\dfrac{\text{area of } \triangle AGE}{\text{area of } \triangle BCG}$.

Problem 14. Determine the largest multiple of 125 with all its digits different.

Problem 15. Given a sequence of integers

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Starting from the third term, each term is equal to the sum of all previous terms (for example, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). It is known that $a_1 = 1$, and n is the largest possible integer with $a_n = 10000$.

Find a_2.

Part D (4 points each)

Problem 16. How many palindromic integers are there that remains a palindromic number after addition with 2020?

Note: An integer is palindromic if it remains the same if read forward or backward. For example, 747 and 1991 are palindromic integers.

Problem 17. Find the smallest integer $n \geq 100$ such that

$$\sqrt{2^n + 2^{100} + 2^{103}}$$

is an integer.

Problem 18. Given a trapezium $ABCD$, with side AB parallel to side CD. The two diagonals of the trapezium meet at E. It is known that the area of $\triangle DAE$ is 3 times the area of $\triangle ABE$.

Determine the value of $\dfrac{\text{area of } \triangle BCD}{\text{area of } \triangle ABE}$.

Problem 19. In a class of 100 students, there are a females and b males, where $0 \leq a \leq 100$. The sum of digits of a is $S(a)$, and the sum of digits of b is $S(b)$.

If $S(a) + S(b) = 19$, how many possible values of a are there?

Problem 20. A number is said to be k-good if the number can be expressed as a sum of k consecutive positive integers. For example, 27 is 2-good and 3-good, since 27 can be expressed as

$$27 = 13 + 14 \qquad \text{and} \qquad 27 = 8 + 9 + 10.$$

Find the smallest number that is 2-good, 3-good, and 7-good.

7 Senior Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Find the positive integer N that satisfies the equation

$$4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{99} \times 4^{100} = N^{2020}.$$

Problem 2. Among the numbers in the following sequence:

$$\frac{0}{60}, \quad \frac{1}{59}, \quad \frac{2}{58}, \quad \frac{3}{57}, \quad \ldots, \quad \frac{57}{3}, \quad \frac{58}{2}, \quad \frac{59}{1},$$

how many of them are integers?

Problem 3. The flag of Malaysia consists of a blue rectangle at the upper left corner, and 14 stripes with equal thickness, coloured alternately red and white. The width of the blue rectangle is half the width of the flag.

If a Malaysian flag has an area of 140 cm^2, determine the area of the flag (in cm^2) that is coloured red.

Problem 4. In a flower garden, 99% of the flowers are roses, and the rest are lilies. The gardener wants to decrease the percentage of roses to 98% by discarding some roses. The amount of roses he needs to discard is $k\%$ of all the flowers.

Find k.

Problem 5. Farah received a calendar for year 2020 as a gift. Once the year ends, she plans to keep it because she can reuse the exact same calendar in a future year N (this means that for any given date in year N, it will fall on the same day as in year 2020. For example, 5 September in year N will fall on Saturday, as is 5 September 2020).

What is the smallest possible N?

Part B (2 points each)

Problem 6. A positive integer is defined as *awesome* if the sum of its digits equals its number of digits. For example, the number 2020 is awesome because its sum of digits and its number of digits are both 4.

How many awesome positive integers (including 2020) less than 10,000 are there?

Note: An awesome integer cannot start with digit 0.

Problem 7. Find the last digit of the number

$$\left(\left(((1+1)^{10}+1)^{20}+1\right)^{30}+1\right)^{40}.$$

Problem 8. Let $ABCDEF$ be a regular hexagon. Lines AC and BE intersect at G.

Determine the value of $\dfrac{\text{area of }\triangle AGE}{\text{area of }\triangle BCG}$.

Problem 9. Determine the largest multiple of 125 with all its digits different.

Problem 10. Given a sequence of integers

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

Starting from the third term, each term is equal to the sum of all previous terms (for example, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$). It is known that $a_1 = 1$, and n is the largest possible integer with $a_n = 10000$.

Find a_2.

Part C (3 points each)

Problem 11. How many palindromic integers are there that remains a palindromic number after addition with 2020?

Note: An integer is palindromic if it remains the same if read forward or backward. For example, 747 and 1991 are palindromic integers.

Problem 12. Find the smallest integer $n \geq 100$ such that

$$\sqrt{2^n + 2^{100} + 2^{103}}$$

is an integer.

Problem 13. Given a trapezium $ABCD$, with side AB parallel to side CD. The two diagonals of the trapezium meet at E. It is known that the area of $\triangle DAE$ is 3 times the area of $\triangle ABE$.

Determine the value of $\dfrac{\text{area of } \triangle BCD}{\text{area of } \triangle ABE}$.

Problem 14. In a class of 100 students, there are a females and b males, where $0 \leq a \leq 100$. The sum of digits of a is $S(a)$, and the sum of digits of b is $S(b)$.

If $S(a) + S(b) = 19$, how many possible values of a are there?

Problem 15. A number is said to be k-good if the number can be expressed as a sum of k consecutive positive integers. For example, 27 is 2-good and 3-good, since 27 can be expressed as

$$27 = 13 + 14 \qquad \text{and} \qquad 27 = 8 + 9 + 10.$$

Find the smallest number that is 2-good, 3-good, and 7-good.

Part D (4 points each)

Problem 16. Given integers a, b, c, d with $a > b > c > d > 1$, and

$$(ac)^2 - (bd)^2 + (ad)^2 - (bc)^2 = 2020.$$

Find $a + b + c + d$.

Problem 17. It is known that the number of female students in a class is more than 48% but less than 50% of the total number of students.

What is the smallest possible number of students in the class?

Problem 18. What is the maximum possible number of reflex angles inside a polygon with 100 sides?

Problem 19. Let x and y be real numbers with

$$|x - y| + |x + y| = 2.$$

Determine the greatest possible value of $x^2 + y^2 - 9y$.

Problem 20. Consider the two-dimensional coordinate plane. For any positive integer n, define $f(n)$ to be the number of lattice points on the line segment connecting point $(0, 0)$ to point $(n, n + 6)$, excluding both endpoints.

Find the value of

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1000).$$

Note: A lattice point is a point with integer x-coordinate and y-coordinate.