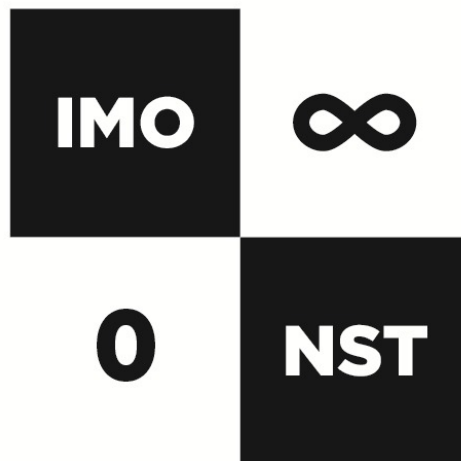


SAMPLE PROBLEMS 2 (IMONST 1)



International Mathematical Olympiad
National Selection Test
MALAYSIA

Malaysia IMO Committee
contact@imo-malaysia.org

Contents

1	About IMONST	2
I	Bahasa Melayu	4
2	Kategori <i>Primary</i>	5
3	Kategori <i>Junior</i>	9
4	Kategori <i>Senior</i>	13
II	English	17
5	Primary Category	18
6	Junior Category	22
7	Senior Category	26
III	JAWAPAN / ANSWERS	30
8	Kategori <i>Primary</i> / Primary Category	31
9	Kategori <i>Junior</i> / Junior Category	32
10	Kategori <i>Senior</i> / Senior Category	33

1 About IMONST

IMO National Selection Test (IMONST) is a national-level mathematics competition whose objective is to promote mathematical problem solving among Malaysian students, and challenge the top mathematical talents in the country. It is organized by the Malaysia IMO Committee. IMONST is approved by the MoE as the selection process for the Malaysian team for the International Mathematical Olympiad (IMO) 2022.

The IMO is the World Championship Mathematics Competition for High School students and is held annually in a different country. The first IMO was held in 1959 in Romania, with 7 countries participating. It has gradually expanded to over 100 countries from 5 continents.

There are two rounds of IMONST: IMONST 1 is an open round, while IMONST 2 is by invitation only.

This booklet covers the problems from IMONST 1 2021 paper.

For more details about IMONST, go to <https://imo-malaysia.org>.

Categories

There are three categories in IMONST 1:

1. Primary – advanced primary school students
2. Junior – Form 1 to Form 3 students
3. Senior – Form 4 to Form 6, and pre-university students.

This is the second time that primary school students are involved in IMO selection in Malaysia. Although the IMONST is perhaps too difficult for the average primary student, bear in mind that there are exceptional mathematical talents of a very young age (as an example, one of the Malaysian participants in IMO 2014 was 12 years old). The IMONST aims to identify the young talents so they can be groomed to be part of future IMO teams.

Format of IMONST 1

IMONST is an online, individual, open-book competition. Students are allowed to use any reference and calculating tools, as long as they sit for the competition themselves without any external help. The problems are designed such that it can be solved without using a calculator.

There are 20 questions for each category, divided into 4 parts (A to D). The parts are arranged in increasing order of difficulty. Every correct answer is awarded 1, 2, 3, 4 points for Part A, B, C, D, respectively. No point is deducted for an incorrect answer. The maximum score is 50 points.

For every question, only the answer needs to be provided. The answer to each question is a non-negative integer.

Problems in IMONST 1 are provided in both Bahasa Melayu and English.

Contact Us

Email the IMO Malaysia Committee at contact@imo-malaysia.org.

Version

Version 1.0, updated on 8 September 2021.

© 2021 IMO Malaysia Committee. All rights reserved.

Part I

Bahasa Melayu

2 Kategori *Primary*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Faris mempunyai enam kubus di atas meja. Jumlah isipadu kesemua kubus tersebut ialah 2021 cm^3 . Lima daripada kubus tersebut mempunyai panjang sisi 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm, dan 11 cm. Apakah panjang sisi kubus yang keenam (dalam cm)?

Soalan 2. Apakah hasil tambah bagi 200 integer positif genap yang pertama?

Soalan 3. Anushri menulis lima integer positif pada sehelai kertas. Kesemua nombor tersebut adalah berbeza, dan kesemuanya adalah kurang daripada 10. Jika kita menambahkan mana-mana dua nombor pada kertas tersebut, hasilnya tidak akan menjadi 10. Apakah nombor yang pasti ditulis oleh Anushri?

Soalan 4. Jika waktu sekarang ialah 10.00 AM, apakah waktu 1,000 jam daripada sekarang?
Nota: Masukkan jawapan mengikut sistem 12 jam, tanpa minit dan AM/PM.
Contohnya, jika jawapannya ialah 9.00 PM, hanya masukkan 9.

Soalan 5. Aminah mempunyai sebuah kereta bernilai RM10,000. Dia menjualnya kepada Neesha dengan keuntungan 10%. Neesha menjual kereta itu kepada Aminah semula dengan kerugian 10%. Berapakah jumlah wang yang Aminah peroleh daripada dua jualbeli tersebut, dalam RM?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 6. Alvin mengambil 250 kubus kecil dengan panjang sisi 1 cm dan mencantumkan kesemuanya untuk membentuk satu kuboid dengan ukuran $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Dia mengecat kesemua muka kuboid besar tersebut dengan warna hijau. Berapakah bilangan kubus kecil yang dicat oleh Alvin?

Soalan 7. Cikgu Emma dan Cikgu Tan masing-masing memilih satu integer (integer tersebut tidak semestinya positif). Hasil darab kedua-dua integer yang dipilih oleh mereka ialah 2021. Berapakah bilangan kemungkinan bagi integer yang dipilih oleh Cikgu Emma?

Soalan 8. Suatu nombor tiga digit dipanggil **hebat** jika digit pertamanya adalah sama dengan hasil tambah dua digit yang berikutnya. Ccontohnya, 431 dan 909 adalah nombor hebat. Berapakah bilangan nombor hebat semuanya?

Soalan 9. Diberi integer positif a, b, c , dan d yang memenuhi persamaan $4a = 5b = 6c = 7d$. Apakah nilai paling kecil yang mungkin bagi b ?

Soalan 10. Cari integer positif terkecil n supaya hasil tambah digit-digit n boleh bahagi dengan 5, dan hasil tambah digit-digit bagi $n + 1$ juga boleh bahagi dengan 5.

Nota: Hasil tambah digit-digit bagi 1440 ialah $1 + 4 + 4 + 0 = 9$.

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Adam melukis 7 bulatan pada sehelai kertas, dengan jejari 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, dan 7 cm. Bulatan-bulatan tersebut tidak bersilang antara satu sama lain. Dia mewarnakan beberapa bulatan dengan warna merah sepenuhnya, dan mewarnakan bulatan selebihnya dengan warna biru sepenuhnya. Apakah beza terkecil yang mungkin (dalam cm^2) antara jumlah luas bulatan-bulatan merah dan jumlah luas bulatan-bulatan biru?

Soalan 12. Nombor 2021 mempunyai suatu sifat istimewa iaitu hasil tambah mana-mana dua digit yang bersebelahan dalam nombor tersebut ialah nombor perdana ($2 + 0 = 2$, $0 + 2 = 2$, dan $2 + 1 = 3$ kesemuanya adalah nombor perdana). Antara nombor-nombor daripada 2021 hingga 2041, berapakah bilangan nombor yang mempunyai sifat ini?

Soalan 13. Clarissa membuka satu kedai haiwan peliharaan yang menjual tiga jenis haiwan peliharaan: ikan emas, tikus belanda, dan burung nuri. Haiwan-haiwan peliharaan dalam kedai tersebut mempunyai sejumlah 14 sayap, 24 kepala, dan 62 kaki. Berapakah bilangan ikan emas di dalam kedai Clarissa?

Soalan 14. Suatu integer positif n dipanggil **istimewa** jika n boleh bahagi dengan 4, $n + 1$ boleh bahagi dengan 5, dan $n + 2$ boleh bahagi dengan 6. Berapakah bilangan integer istimewa yang kurang daripada 1000?

Soalan 15. Andaikan dekad ini bermula pada 1 Januari 2020 (yang merupakan hari Rabu) dan dekad seterusnya bermula pada 1 Januari 2030. Berapakah bilangan hari Rabu dalam dekad ini?

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Diberi suatu segi tiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Andaikan D suatu titik pada AB sehinggakan CD adalah pembahagi dua sama sudut bagi $\angle ACB$. Jika $CB = CD$, apakah $\angle ADC$, dalam darjah?

Soalan 17. Tentukan bilangan segi tiga sama kaki dengan sifat berikut: semua sisinya mempunyai panjang integer (dalam cm), dan sisi terpanjangnya mempunyai panjang 21 cm.

Soalan 18. Hafiz menandakan k titik pada lilitan sebuah bulatan. Dia menyambungkan setiap titik dengan semua titik yang lain dengan garis lurus. Jika terdapat 210 garis yang terbentuk, apakah nilai k ?

Soalan 19. Apakah gandaan positif terkecil bagi 24 yang boleh ditulis menggunakan digit-digit 4 dan 5 sahaja?

Soalan 20. Dalam suatu pertandingan matematik, 2021 orang peserta telah mengambil bahagian. Pingat emas, perak, dan gangsa bagi para pemenang dianugerahkan seperti berikut:

- (i) bilangan pingat perak adalah sekurang-kurangnya dua kali ganda daripada bilangan pingat emas;
- (ii) bilangan pingat gangsa adalah sekurang-kurangnya dua kali ganda daripada bilangan pingat perak;
- (iii) jumlah semua pingat tidak melebihi 40% daripada bilangan peserta.

Pengarah pertandingan tersebut ingin memaksimumkan bilangan pingat emas yang dianugerahkan mengikut syarat-syarat tersebut. Dalam kes ini, berapakah bilangan maksimum pingat gangsa yang boleh dianugerahkan?

3 Kategori *Junior*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Adam melukis 7 bulatan pada sehelai kertas, dengan jejari 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, dan 7 cm. Bulatan-bulatan tersebut tidak bersilang antara satu sama lain. Dia mewarnakan beberapa bulatan dengan warna merah sepenuhnya, dan mewarnakan bulatan selebihnya dengan warna biru sepenuhnya. Apakah beza terkecil yang mungkin (dalam cm^2) antara jumlah luas bulatan-bulatan merah dan jumlah luas bulatan-bulatan biru?

Soalan 2. Nombor 2021 mempunyai suatu sifat istimewa iaitu hasil tambah mana-mana dua digit yang bersebelahan dalam nombor tersebut ialah nombor perdana ($2 + 0 = 2$, $0 + 2 = 2$, dan $2 + 1 = 3$ kesemuanya adalah nombor perdana). Antara nombor-nombor daripada 2021 hingga 2041, berapakah bilangan nombor yang mempunyai sifat ini?

Soalan 3. Clarissa membuka satu kedai haiwan peliharaan yang menjual tiga jenis haiwan peliharaan: ikan emas, tikus belanda, dan burung nuri. Haiwan-haiwan peliharaan dalam kedai tersebut mempunyai sejumlah 14 sayap, 24 kepala, dan 62 kaki. Berapakah bilangan ikan emas di dalam kedai Clarissa?

Soalan 4. Suatu integer positif n dipanggil **istimewa** jika n boleh bahagi dengan 4, $n + 1$ boleh bahagi dengan 5, dan $n + 2$ boleh bahagi dengan 6. Berapakah bilangan integer istimewa yang kurang daripada 1000?

Soalan 5. Andaikan dekad ini bermula pada 1 Januari 2020 (yang merupakan hari Rabu) dan dekad seterusnya bermula pada 1 Januari 2030. Berapakah bilangan hari Rabu dalam dekad ini?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 6. Diberi suatu segi tiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Andaikan D suatu titik pada AB sehinggakan CD adalah pembahagi dua sama sudut bagi $\angle ACB$. Jika $CB = CD$, apakah $\angle ADC$, dalam darjah?

Soalan 7. Tentukan bilangan segi tiga sama kaki dengan sifat berikut: semua sisinya mempunyai panjang integer (dalam cm), dan sisi terpanjangnya mempunyai panjang 21 cm.

Soalan 8. Hafiz menandakan k titik pada lilitan sebuah bulatan. Dia menyambungkan setiap titik dengan semua titik yang lain dengan garis lurus. Jika terdapat 210 garis yang terbentuk, apakah nilai k ?

Soalan 9. Apakah gandaan positif terkecil bagi 24 yang boleh ditulis menggunakan digit-digit 4 dan 5 sahaja?

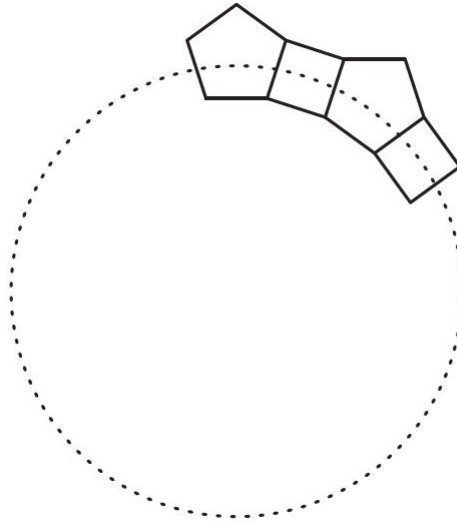
Soalan 10. Dalam suatu pertandingan matematik, 2021 orang peserta telah mengambil bahagian. Pingat emas, perak, dan gangsa bagi para pemenang dianugerahkan seperti berikut:

- (i) bilangan pingat perak adalah sekurang-kurangnya dua kali ganda daripada bilangan pingat emas;
- (ii) bilangan pingat gangsa adalah sekurang-kurangnya dua kali ganda daripada bilangan pingat perak;
- (iii) jumlah semua pingat tidak melebihi 40% daripada bilangan peserta.

Pengarah pertandingan tersebut ingin memaksimumkan bilangan pingat emas yang dianugerahkan mengikut syarat-syarat tersebut. Dalam kes ini, berapakah bilangan maksimum pingat gangsa yang boleh dianugerahkan?

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Dinesh mempunyai sebilangan segi empat sama dan pentagon sekata, kesemuanya dengan panjang sisi 1. Dia mahu menyusun bentuk-bentuk tersebut secara berselang-seli untuk membentuk suatu relung tertutup (lihat gambarajah). Berapakah bilangan pentagon yang Dinesh perlukan untuk berbuat sedemikian?



Soalan 12. Jika $x + \frac{1}{x} = 5$, apakah nilai bagi $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Soalan 13. Suatu kelas mempunyai 10 orang pelajar, kesemuanya dengan ketinggian yang berbeza. Mereka ingin beratur dalam satu barisan supaya tiada pelajar yang diapit oleh dua pelajar yang lebih rendah daripadanya. Berapakah bilangan cara untuk membentuk barisan tersebut?

Soalan 14. Panjang bagi kedua-dua pepenjuru suatu rombus mempunyai nisbah 3 : 4 dan hasil tambah 56. Apakah perimeter bagi rombus tersebut?

Soalan 15. Berapakah bilangan integer n (dengan $1 \leq n \leq 2021$) yang mempunyai sifat bahawa $8n + 1$ adalah suatu nombor kuasa dua sempurna?

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Diberi suatu segmen bagi suatu bulatan, yang terdiri daripada satu sisi lurus dan satu lengkok. Panjang sisi lurus tersebut ialah 24. Panjang di antara titik tengah bagi sisi lurus dan titik tengah bagi lengkok ialah 6. Cari jejari bulatan tersebut.

Soalan 17. Sofia terlupa kod kunci bagi telefonnya. Dia hanya teringat yang ia mempunyai empat digit dan hasil darab kesemua digitnya ialah 18. Berapakah bilangan kod kunci yang memenuhi syarat-syarat tersebut?

Soalan 18. Sebatang pokok membesar dengan cara yang berikut. Pada hari pertama, satu dahan akan tumbuh dari tanah. Pada hari kedua, satu daun akan tumbuh pada dahan tersebut dan hujung dahan itu akan bercambah kepada dua dahan yang baru. Pada hari-hari seterusnya, satu daun akan tumbuh pada setiap dahan yang wujud, dan hujung setiap dahan akan bercambah kepada dua dahan yang baru. Berapakah bilangan daun pada pokok itu pada akhir hari kesepuluh?

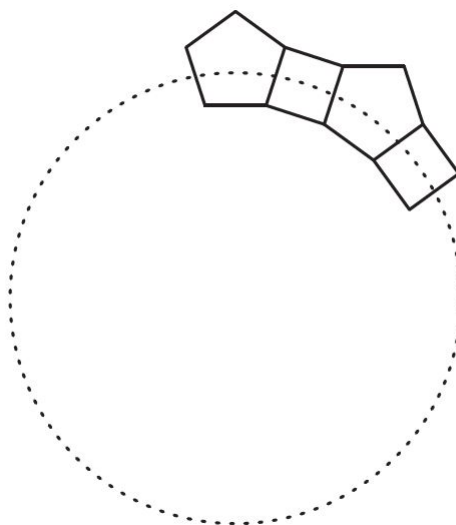
Soalan 19. Cari hasil tambah bagi digit-digit (asas 10) bagi nombor $(10^{2021} + 2021)^2$.

Soalan 20. Tentukan bilangan penyelesaian integer (x, y, z) , dengan $0 \leq x, y, z \leq 100$, bagi persamaan $(x - y)^2 + (y + z)^2 = (x + y)^2 + (y - z)^2$.

4 Kategori *Senior*

Bahagian A (1 markah setiap soalan)

Soalan 1. Dinesh mempunyai sebilangan segi empat sama dan pentagon sekata, kesemuanya dengan panjang sisi 1. Dia mahu menyusun bentuk-bentuk tersebut secara berselang-seli untuk membentuk suatu relung tertutup (lihat gambarajah). Berapakah bilangan pentagon yang Dinesh perlukan untuk berbuat sedemikian?



Soalan 2. Jika $x + \frac{1}{x} = 5$, apakah nilai bagi $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Soalan 3. Suatu kelas mempunyai 10 orang pelajar, kesemuanya dengan ketinggian yang berbeza. Mereka ingin beratur dalam satu barisan supaya tiada pelajar yang diapit oleh dua pelajar yang lebih rendah daripadanya. Berapakah bilangan cara untuk membentuk barisan tersebut?

Soalan 4. Panjang bagi kedua-dua pepenjuru suatu rombus mempunyai nisbah 3 : 4 dan hasil tambah 56. Apakah perimeter bagi rombus tersebut?

Soalan 5. Berapakah bilangan integer n (dengan $1 \leq n \leq 2021$) yang mempunyai sifat bahawa $8n + 1$ adalah suatu nombor kuasa dua sempurna?

Bahagian B (2 markah setiap soalan)

Soalan 16. Diberi suatu segmen bagi suatu bulatan, yang terdiri daripada satu sisi lurus dan satu lengkok. Panjang sisi lurus tersebut ialah 24. Panjang di antara titik tengah bagi sisi lurus dan titik tengah bagi lengkok ialah 6. Cari jejari bulatan tersebut.

Soalan 17. Sofia terlupa kod kunci bagi telefonnya. Dia hanya teringat yang ia mempunyai empat digit dan hasil darab kesemua digitnya ialah 18. Berapakah bilangan kod kunci yang memenuhi syarat-syarat tersebut?

Soalan 18. Sebatang pokok membesar dengan cara yang berikut. Pada hari pertama, satu dahan akan tumbuh dari tanah. Pada hari kedua, satu daun akan tumbuh pada dahan tersebut dan hujung dahan itu akan bercambah kepada dua dahan yang baru. Pada hari-hari seterusnya, satu daun akan tumbuh pada setiap dahan yang wujud, dan hujung setiap dahan akan bercambah kepada dua dahan yang baru. Berapakah bilangan daun pada pokok itu pada akhir hari kesepuluh?

Soalan 19. Cari hasil tambah bagi digit-digit (asas 10) bagi nombor $(10^{2021} + 2021)^2$.

Soalan 20. Tentukan bilangan penyelesaian integer (x, y, z) , dengan $0 \leq x, y, z \leq 100$, bagi persamaan $(x - y)^2 + (y + z)^2 = (x + y)^2 + (y - z)^2$.

Bahagian C (3 markah setiap soalan)

Soalan 11. Diberi dua titik A dan B dan dua bulatan, Γ_1 yang berpusat di A dan melalui B , dan Γ_2 yang berpusat di B dan melalui A . Garis AB bersilang dengan Γ_2 pada titik C . Titik D berada pada Γ_2 dengan $\angle CDB = 57^\circ$. Garis BD bersilang dengan Γ_1 pada titik E . Apakah $\angle CAE$, dalam darjah?

Soalan 12. Tentukan bilangan penyelesaian integer positif (x, y, z) bagi persamaan $xyz = 2(x + y + z)$.

Soalan 13. Jasmin mempunyai satu telefon bimbit yang menggunakan bateri. Apabila bateri tersebut mati, ia memerlukan 2 jam untuk dicas sepenuhnya, selagi dia tidak menggunakan telefon tersebut. Jika dia menggunakan telefon tersebut ketika dicas, 75% daripada cas yang diperoleh akan dihabiskan serta merta dan selebihnya disimpan di dalam bateri tersebut. Pada suatu hari, baterinya telah mati. Jasmin mengambil masa 2 jam 30 minit untuk mengecas bateri tersebut sepenuhnya. Berapa minitkah telefon itu telah digunakan ketika dicas?

Soalan 14. Diberi suatu fungsi $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$. Setiap pekali a, b, c, d, e , dan f adalah bernilai sama ada 1 atau -1 . Jika $p(2) = 11$, apakah nilai bagi $p(3)$?

Soalan 15. Cari hasil tambah kesemua integer n yang mempunyai sifat berikut: kedua-kedua n dan $n + 2021$ adalah nombor kuasa dua sempurna.

Bahagian D (4 markah setiap soalan)

Soalan 16. Diberi suatu segi empat sama $ABCD$ dengan panjang sisi 6. Kita lukiskan tembereng garis dari titik tengah bagi setiap sisi ke bucu-bucu pada sisi yang bertentangan. Contohnya, kita lukiskan tembereng garis dari titik tengah bagi sisi AB ke bucu C dan D . Lapan tembereng garis yang terhasil membentuk satu oktagon dalam segi empat sama tersebut. Apakah luas bagi oktagon ini?

Soalan 17. Tentukan hasil tambah bagi kesemua integer positif n yang memenuhi syarat berikut: apabila $6^n + 1$ ditulis dalam asas 10, kesemua digitnya adalah sama.

Soalan 18. Berapakah bilangan nombor nyata x yang merupakan penyelesaian bagi persamaan $|x - 2| - 4 = \frac{1}{|x - 3|}$?

Soalan 19. Suatu syarikat mempunyai satu peti rahsia yang dikunci dengan enam mangga. Beberapa salinan kunci telah diagihkan kepada pengarah-pengarah syarikat tersebut. Setiap kunci boleh membuka tepat satu mangga. Setiap pengarah diberi tiga kunci untuk tiga mangga yang berbeza. Tiada dua pengarah yang boleh membuka tiga mangga yang sama. Tiada dua pengarah yang boleh membuka peti rahsia tersebut sesama mereka. Berapakah bilangan pengarah yang maksimum bagi syarikat tersebut?

Soalan 20. Petak-petak bagi suatu jadual bersaiz 2021×2021 diisi dengan nombor-nombor mengikut peraturan berikut. Petak di kedudukan bawah kiri, yang kita label dengan koordinat $(1, 1)$, mengandungi nombor 0. Untuk setiap petak C yang lain, kita pertimbangkan suatu laluan dari $(1, 1)$ ke C , yang pada setiap langkah kita hanya boleh bergerak satu petak ke kanan atau satu petak ke atas (bukan secara serong). Jika kita mengambil bilangan langkah dalam laluan tersebut dan menambahkan nombor-nombor di dalam semua petak sepanjang laluan itu, kita akan mendapat nombor di dalam petak C . Contohnya, petak dengan koordinat $(2, 1)$ mengandungi $1 = 1 + 0$, petak dengan koordinat $(3, 1)$ mengandungi $3 = 2 + 0 + 1$, dan petak dengan koordinat $(3, 2)$ mengandungi $7 = 3 + 0 + 1 + 3$. Apakah digit terakhir bagi nombor di dalam petak $(2021, 2021)$?

Part II

English

5 Primary Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Faris has six cubes on his table. The cubes have a total volume of 2021 cm^3 . Five of the cubes have side lengths 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm, and 11 cm. What is the side length of the sixth cube (in cm)?

Problem 2. What is the sum of the first 200 even positive integers?

Problem 3. Anushri writes down five positive integers on a paper. The numbers are all different, and are all smaller than 10. If we add any two of the numbers on the paper, then the result is never 10. What is the number that Anushri writes down for certain?

Problem 4. If the time now is 10.00 AM, what is the time 1,000 hours from now?

Note: Enter the answer in a 12-hour system, without minutes and AM/PM. For example, if the answer is 9.00 PM, just enter 9.

Problem 5. Aminah owns a car worth RM10,000. She sells it to Neesha at a 10% profit. Neesha sells the car back to Aminah at a 10% loss. How much money did Aminah make from the two transactions, in RM?

Part B (2 points each)

Problem 6. Alvin takes 250 small cubes of side length 1 cm and glues them together to make a cuboid of size 5 cm \times 5 cm \times 10 cm. He paints all the faces of the large cuboid with the color green. How many of the small cubes are painted by Alvin?

Problem 7. Cikgu Emma and Cikgu Tan select one integer each (the integers do not have to be positive). The product of the two integers they selected is 2021. How many possible integers could have been selected by Cikgu Emma?

Problem 8. A three-digit number is called **superb** if the first digit is equal to the sum of the other two digits. For example, 431 and 909 are superb numbers. How many superb numbers are there?

Problem 9. Given positive integers $a, b, c,$ and d that satisfy the equation $4a = 5b = 6c = 7d$. What is the smallest possible value of b ?

Problem 10. Find the smallest positive integer n such that the digit sum of n is divisible by 5, and the digit sum of $n + 1$ is also divisible by 5.

Note: The digit sum of 1440 is $1 + 4 + 4 + 0 = 9$.

Part C (3 points each)

Problem 11. Adam draws 7 circles on a paper, with radii 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, and 7 cm. The circles do not intersect each other. He colors some circles completely red, and the rest of the circles completely blue. What is the minimum possible difference (in cm^2) between the total area of the red circles and the total area of the blue circles?

Problem 12. The number 2021 has a special property that the sum of any two neighboring digits in the number is a prime number ($2 + 0 = 2$, $0 + 2 = 2$, and $2 + 1 = 3$ are all prime numbers). Among numbers from 2021 to 2041, how many of them have this property?

Problem 13. Clarissa opens a pet shop that sells three types of pets: goldfishes, hamsters, and parrots. The pets inside the shop together have a total of 14 wings, 24 heads, and 62 legs. How many goldfishes are there inside Clarissa's shop?

Problem 14. A positive integer n is called **special** if n is divisible by 4, $n + 1$ is divisible by 5, and $n + 2$ is divisible by 6. How many special integers smaller than 1000 are there?

Problem 15. Suppose that this decade begins on 1 January 2020 (which is a Wednesday) and the next decade begins on 1 January 2030. How many Wednesdays are there in this decade?

Part D (4 points each)

Problem 16. Given an isosceles triangle ABC with $AB = AC$. Let D be a point on AB such that CD is the bisector of $\angle ACB$. If $CB = CD$, what is $\angle ADC$, in degrees?

Problem 17. Determine the number of isosceles triangles with the following properties: all the sides have integer lengths (in cm), and the longest side has length 21 cm.

Problem 18. Hafiz marks k points on the circumference of a circle. He connects every point to every other point with straight lines. If there are 210 lines formed, what is k ?

Problem 19. What is the smallest positive multiple of 24 that can be written using digits 4 and 5 only?

Problem 20. In a mathematical competition, there are 2021 participants. Gold, silver, and bronze medals are awarded to the winners as follows: (i) the number of silver medals is at least twice the number of gold medals; (ii) the number of bronze medals is at least twice the number of silver medals; (iii) the number of all medals is not more than 40% of the number of participants. The competition director wants to maximize the number of gold medals to be awarded based on the given conditions. In this case, what is the maximum number of bronze medals that can be awarded?

6 Junior Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Adam draws 7 circles on a paper, with radii 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, and 7 cm. The circles do not intersect each other. He colors some circles completely red, and the rest of the circles completely blue. What is the minimum possible difference (in cm^2) between the total area of the red circles and the total area of the blue circles?

Problem 2. The number 2021 has a special property that the sum of any two neighboring digits in the number is a prime number ($2 + 0 = 2$, $0 + 2 = 2$, and $2 + 1 = 3$ are all prime numbers). Among numbers from 2021 to 2041, how many of them have this property?

Problem 3. Clarissa opens a pet shop that sells three types of pets: goldfishes, hamsters, and parrots. The pets inside the shop together have a total of 14 wings, 24 heads, and 62 legs. How many goldfishes are there inside Clarissa's shop?

Problem 4. A positive integer n is called **special** if n is divisible by 4, $n + 1$ is divisible by 5, and $n + 2$ is divisible by 6. How many special integers smaller than 1000 are there?

Problem 5. Suppose that this decade begins on 1 January 2020 (which is a Wednesday) and the next decade begins on 1 January 2030. How many Wednesdays are there in this decade?

Part B (2 points each)

Problem 6. Given an isosceles triangle ABC with $AB = AC$. Let D be a point on AB such that CD is the bisector of $\angle ACB$. If $CB = CD$, what is $\angle ADC$, in degrees?

Problem 7. Determine the number of isosceles triangles with the following properties: all the sides have integer lengths (in cm), and the longest side has length 21 cm.

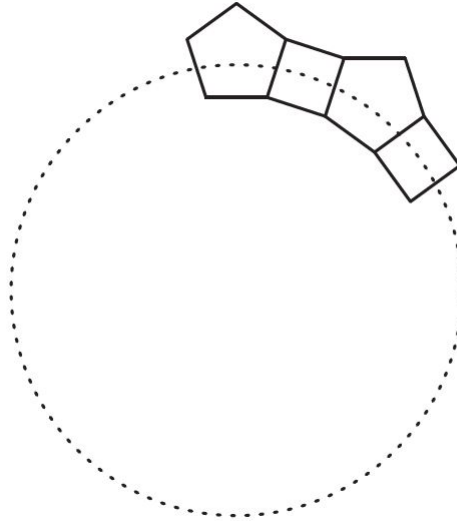
Problem 8. Hafiz marks k points on the circumference of a circle. He connects every point to every other point with straight lines. If there are 210 lines formed, what is k ?

Problem 9. What is the smallest positive multiple of 24 that can be written using digits 4 and 5 only?

Problem 10. In a mathematical competition, there are 2021 participants. Gold, silver, and bronze medals are awarded to the winners as follows: (i) the number of silver medals is at least twice the number of gold medals; (ii) the number of bronze medals is at least twice the number of silver medals; (iii) the number of all medals is not more than 40% of the number of participants. The competition director wants to maximize the number of gold medals to be awarded based on the given conditions. In this case, what is the maximum number of bronze medals that can be awarded?

Part C (3 points each)

Problem 11. Dinesh has several squares and regular pentagons, all with side length 1. He wants to arrange the shapes alternately to form a closed loop (see diagram). How many pentagons would Dinesh need to do so?



Problem 12. If $x + \frac{1}{x} = 5$, what is the value of $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Problem 13. There are 10 girls in a class, all with different heights. They want to form a queue so that no girl stands directly between two girls shorter than her. How many ways are there to form the queue?

Problem 14. The two diagonals of a rhombus have lengths with ratio 3 : 4 and sum 56. What is the perimeter of the rhombus?

Problem 15. How many integers n (with $1 \leq n \leq 2021$) have the property that $8n + 1$ is a perfect square?

Part D (4 points each)

Problem 16. Given a segment of a circle, consisting of a straight edge and an arc. The length of the straight edge is 24. The length between the midpoint of the straight edge and the midpoint of the arc is 6. Find the radius of the circle.

Problem 17. Sofia has forgotten the passcode of her phone. She only remembers that it has four digits and that the product of its digits is 18. How many passcodes satisfy these conditions?

Problem 18. A tree grows in the following manner. On the first day, one branch grows out of the ground. On the second day, a leaf grows on the branch and the branch tip splits up into two new branches. On each subsequent day, a new leaf grows on every existing branch, and each branch tip splits up into two new branches. How many leaves does the tree have at the end of the tenth day?

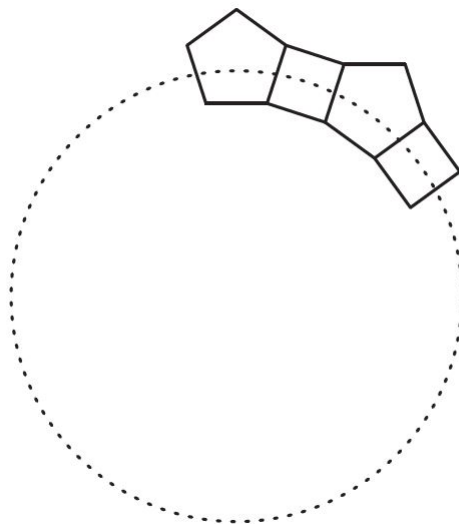
Problem 19. Find the sum of (decimal) digits of the number $(10^{2021} + 2021)^2$.

Problem 20. Determine the number of integer solutions (x, y, z) , with $0 \leq x, y, z \leq 100$, for the equation $(x - y)^2 + (y + z)^2 = (x + y)^2 + (y - z)^2$.

7 Senior Category

Part A (1 point each)

Problem 1. Dinesh has several squares and regular pentagons, all with side length 1. He wants to arrange the shapes alternately to form a closed loop (see diagram). How many pentagons would Dinesh need to do so?



Problem 2. If $x + \frac{1}{x} = 5$, what is the value of $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Problem 3. There are 10 girls in a class, all with different heights. They want to form a queue so that no girl stands directly between two girls shorter than her. How many ways are there to form the queue?

Problem 4. The two diagonals of a rhombus have lengths with ratio 3 : 4 and sum 56. What is the perimeter of the rhombus?

Problem 5. How many integers n (with $1 \leq n \leq 2021$) have the property that $8n + 1$ is a perfect square?

Part B (2 points each)

Problem 6. Given a segment of a circle, consisting of a straight edge and an arc. The length of the straight edge is 24. The length between the midpoint of the straight edge and the midpoint of the arc is 6. Find the radius of the circle.

Problem 7. Sofia has forgotten the passcode of her phone. She only remembers that it has four digits and that the product of its digits is 18. How many passcodes satisfy these conditions?

Problem 8. A tree grows in the following manner. On the first day, one branch grows out of the ground. On the second day, a leaf grows on the branch and the branch tip splits up into two new branches. On each subsequent day, a new leaf grows on every existing branch, and each branch tip splits up into two new branches. How many leaves does the tree have at the end of the tenth day?

Problem 9. Find the sum of (decimal) digits of the number $(10^{2021} + 2021)^2$.

Problem 10. Determine the number of integer solutions (x, y, z) , with $0 \leq x, y, z \leq 100$, for the equation $(x - y)^2 + (y + z)^2 = (x + y)^2 + (y - z)^2$.

Part C (3 points each)

Problem 11. Given two points A and B and two circles, Γ_1 with center A and passing through B , and Γ_2 with center B and passing through A . Line AB meets Γ_2 at point C . Point D lies on Γ_2 such that $\angle CDB = 57^\circ$. Line BD meets Γ_1 at point E . What is $\angle CAE$, in degrees?

Problem 12. Determine the number of positive integer solutions (x, y, z) to the equation $xyz = 2(x + y + z)$.

Problem 13. Jasmin has a mobile phone that runs on a battery. When the battery is dead, it takes 2 hours to recharge it fully, if she is not using the phone. If she uses the phone while recharging, 75% of the charge obtained is immediately consumed and the remaining is stored in the battery. One day, her battery died. Jasmin took 2 hours 30 minutes to recharge the battery fully. For how many minutes did she use the phone while recharging?

Problem 14. Given a function $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$. Each coefficient a, b, c, d, e , and f is equal to either 1 or -1 . If $p(2) = 11$, what is the value of $p(3)$?

Problem 15. Find the sum of all integers n with this property: both n and $n + 2021$ are perfect squares.

Part D (4 points each)

Problem 16. Given a square $ABCD$ with side length 6. We draw line segments from the midpoints of each side to the vertices on the opposite side. For example, we draw line segments from the midpoint of side AB to vertices C and D . The eight resulting line segments together bound an octagon inside the square. What is the area of this octagon?

Problem 17. Determine the sum of all positive integers n that satisfy the following condition: when $6^n + 1$ is written in base 10, all its digits are equal.

Problem 18. How many real numbers x are solutions to the equation $|x - 2| - 4 = \frac{1}{|x - 3|}$?

Problem 19. A company has a secret safe box that is locked by six locks. Several copies of the keys are distributed among the directors of the company. Each key can unlock exactly one lock. Each director has three keys for three different locks. No two directors can unlock the same three locks. No two directors together can unlock the safe. What is the maximum possible number of directors in the company?

Problem 20. The cells of a 2021×2021 table are filled with numbers using the following rule. The bottom left cell, which we label with coordinate $(1, 1)$, contains the number 0. For every other cell C , we consider a route from $(1, 1)$ to C , where at each step we can only go one cell to the right or one cell up (not diagonally). If we take the number of steps in the route and add the numbers from the cells along the route, we obtain the number in cell C . For example, the cell with coordinate $(2, 1)$ contains $1 = 1 + 0$, the cell with coordinate $(3, 1)$ contains $3 = 2 + 0 + 1$, and the cell with coordinate $(3, 2)$ contains $7 = 3 + 0 + 1 + 3$. What is the last digit of the number in the cell $(2021, 2021)$?

Part III

JAWAPAN / ANSWERS

8 Kategorie *Primary*/ Primary Category

Problem 1 2

Problem 2 40200

Problem 3 5

Problem 4 2

Problem 5 1100

Problem 6 178

Problem 7 8

Problem 8 54

Problem 9 84

Problem 10 49999

Problem 11 0

Problem 12 8

Problem 13 5

Problem 14 17

Problem 15 522

Problem 16 108

Problem 17 31

Problem 18 21

Problem 19 5544

Problem 20 463

9 Kategory *Junior*/ Junior Category

Problem 1 0

Problem 2 8

Problem 3 5

Problem 4 17

Problem 5 522

Problem 6 108

Problem 7 31

Problem 8 21

Problem 9 5544

Problem 10 463

Problem 11 10

Problem 12 110

Problem 13 512

Problem 14 80

Problem 15 63

Problem 16 15

Problem 17 36

Problem 18 1013

Problem 19 36

Problem 20 20301

10 Kategorie *Senior*/ Senior Category

Problem 1 10

Problem 2 110

Problem 3 512

Problem 4 80

Problem 5 63

Problem 6 15

Problem 7 36

Problem 8 1013

Problem 9 36

Problem 10 20301

Problem 11 48

Problem 12 15

Problem 13 40

Problem 14 142

Problem 15 1020104

Problem 16 6

Problem 17 6

Problem 18 2

Problem 19 10

Problem 20 5